

2.3 再訪集合之運算

上一節我們談過兩個集的聯集與交集，若 A, B, C 為集合，我們定義

$$A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C$$

$$A \cap B \cap C = (A \cap B) \cap C$$

由交換律及結合律我們知道，

$$A \cup B \cup C = A \cup C \cup B = B \cup A \cup C = B \cup C \cup A = C \cup A \cup B = C \cup B \cup A$$

$$A \cap B \cap C = A \cap C \cap B = B \cap A \cap C = B \cap C \cap A = C \cap A \cap B = C \cap B \cap A$$

令 n 為一正整數，假設 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 為包含於宇集 U 之集合。我們如何定義 $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ 呢？

數學歸納法原理

假設 n_0 為一正整數，對每一個正整數 $n \geq n_0$ ， $P(n)$ 為一命題。若

(i) $P(n_0)$ 為真。

(ii) 對任意自然數 $k \geq n_0$ ，若 $P(k)$ 為真，則 $P(k+1)$ 亦為真。

則「 $\forall n \geq n_0, P(n)$ 」為真。

數學歸納法就像骨牌效應一樣：如果你敢肯定你的骨牌排的很好——每一張骨牌被推倒時，都能連帶地把下一張骨牌也推倒——那麼只要有人推倒第一張骨牌，它就會推倒第二張骨牌，結果又推倒了第三張骨牌，以此類推，你就知道後面所有的骨牌都會跟著倒下，沒有一個例外。

因此當我們要證明「某性質對所有大於等於 n_0 之正整數都成立」時，不再需要大費周章地檢驗每一個正整數，就如同不用親自把骨牌一張張地推倒一樣。只要確定 $n = n_0$ 成立，再確定對任意正整數 $k \geq n_0$ ，若 $n = k$ 成立，則 $n = k + 1$ 亦成立；由數學歸納法原理，我們就可以肯定此性質對所有大於等於 n_0 之正整數都成立。

對任意正整數 n ，假設 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 為包含於宇集 U 之集合。

定義

$$\bigcup_{j=1}^1 A_j = A_1, \quad \bigcap_{j=1}^1 A_j = A_1$$

若由數學歸納法原理，我們可以定義

$$\bigcup_{j=1}^n A_j = (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{n-1}) \cup A_n$$

$$\bigcap_{j=1}^n A_j = (A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \cap A_n$$

定理 1 令 n 為一正整數，假設 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 為包含於字集 U 之集合，則

$$(a) \bigcup_{j=1}^n A_j = \{x \in U \mid \exists j = 1, \dots, n \text{ 使得 } x \in A_j\}$$

$$(b) \bigcap_{j=1}^n A_j = \{x \in U \mid \forall j = 1, \dots, n, x \in A_j\}$$

證明： 對集合之個數 n 我們利用數學歸納法來做證明。

(a) 對每一個正整數，令

$$P(n) = \left[\bigcup_{j=1}^n A_j = \{x \in U \mid \exists j = 1, \dots, n \text{ 使得 } x \in A_j\} \right]$$

(i) $n=1$ 時， $\bigcup_{j=1}^1 A_j = A_1$ ， $P(1)$ 為真。

(ii) 對任意自然數 k ，假設 $P(k)$ 為真。即

$$\bigcup_{j=1}^k A_j = \{x \in U \mid \exists j = 1, \dots, k \text{ 使得 } x \in A_j\}$$

因為 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{k+1} = (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k) \cup A_{k+1}$ ，

不難看出 $\bigcup_{j=1}^n A_j \supseteq \{x \in U \mid \exists j = 1, \dots, n \text{ 使得 } x \in A_j\}$ 。

反之，若

$$x \in A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{k+1}$$

則

$$x \in A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k \text{ 或 } x \in A_{k+1}$$

若 $x \in A_{k+1}$ ，則 $\bigcup_{j=1}^n A_j \subseteq \{x \in U \mid \exists j = 1, \dots, n \text{ 使得 } x \in A_j\}$ 。

若 $x \in A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k$ ，由數學歸納法之假設，

$$\exists j = 1, \dots, k \text{ 使得 } x \in A_j$$

$$\text{則 } \bigcup_{j=1}^n A_j \subseteq \{x \in U \mid \exists j = 1, \dots, n \text{ 使得 } x \in A_j\}$$

故 $\bigcup_{j=1}^n A_j \subseteq \{x \in U \mid \exists j=1, \dots, n \text{ 使得 } x \in A_j\}$,

因此 $P(k+1)$ 亦為真。

由數學歸納法原理，「 $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ 」為真。也就是

$$\bigcup_{j=1}^n A_j = \{x \in U \mid \exists j=1, \dots, n \text{ 使得 } x \in A_j\}, \forall n \in \mathbb{N}$$

(b) 略。

例：(a) $\bigcup_{j=1}^{10} [0, j] = [0, 1] \cup [0, 2] \cup \dots \cup [0, 10] = [0, 10]$

(b) $\bigcap_{j=1}^{10} [0, j] = [0, 1] \cap [0, 2] \cap \dots \cap [0, 10] = [0, 1]$

解：(a) 因為 $\bigcup_{j=1}^{10} [0, j] = ([0, 1] \cup [0, 2] \cup \dots \cup [0, 9]) \cup [0, 10]$,

所以 $[0, 10] \subseteq \bigcup_{j=1}^{10} [0, j]$ 。

反之，若 $x \in \bigcup_{j=1}^{10} [0, j]$ ，則 $\exists 1 \leq j \leq 10$ ，使得 $x \in [0, j]$ 。

我們得知 $0 \leq x \leq j \leq 10$ ，因此 $x \in [0, 10]$ 。

所以， $\bigcup_{j=1}^{10} [0, j] \subseteq [0, 10]$ 。

故 $\bigcup_{j=1}^{10} [0, j] = [0, 10]$ 。

(b). 因為 $\bigcap_{j=1}^{10} [0, j] = [0, 1] \cap ([0, 2] \cap \dots \cap [0, 10])$,

所以 $\bigcap_{j=1}^{10} [0, j] \subseteq [0, 1]$ 。

反之，若 $x \in [0, 1]$ ，則 $0 \leq x \leq 1 \leq j, \forall 1 \leq j \leq 10$ 。

因此 $x \in [0, j], \forall 1 \leq j \leq 10$ 。

所以， $[0, 1] \subseteq \bigcap_{j=1}^{10} [0, j]$ 。

故 $\bigcap_{j=1}^{10} [0, j] = [0, 1]$ 。

假設對每一個正整數 n ， A_n 為包含於字集 U 之集合。我們也可以同樣地定義

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \{x \in U \mid \exists n \in \mathbf{N} \text{ 使得 } x \in A_n\}$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{x \in U \mid x \in A_n, \forall n \in \mathbf{N}\}$$

例：(a) $\bigcup_{n=1}^{\infty} [0, n] = [0, \infty)$

(b) $\bigcap_{n=1}^{\infty} [0, n] = [0, 1]$

解：(a) 令 $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} [0, n]$ ，則 $\exists n \in \mathbf{N}$ ，使得 $x \in [0, n] \subseteq [0, \infty)$ 。

因此， $\bigcup_{n=1}^{\infty} [0, n] \subseteq [0, \infty)$ 。

若 $x \in [0, \infty)$ ，則 $x \geq 0$ 。

由阿基米得性質（註）， $\exists n \in \mathbf{N}$ ，使得 $n \cdot 1 > x$ 。

即 $\exists n \in \mathbf{N}$ ，使得 $x \in [0, n]$ 。

所以， $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} [0, n]$ 。

由此可知 $[0, \infty) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} [0, n]$ 。

故 $\bigcup_{n=1}^{\infty} [0, n] = [0, \infty)$ 。

註：阿基米得性質

$$\forall a, b \in \mathbf{R}^+, \exists n \in \mathbf{N}, \text{ 使得 } na > b。$$

(b) 令 $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [0, n]$ ，則 $x \in [0, n]$ ， $\forall n \in \mathbf{N}$ 。

特別是 $x \in [0, 1]$ 。

因此， $\bigcap_{n=1}^{\infty} [0, n] \subseteq [0, 1]$ 。

若 $x \in [0, 1]$ ，則 $0 \leq x \leq 1 \leq n$ ， $\forall n \in \mathbf{N}$ 。

即 $x \in [0, n]$ ， $\forall n \in \mathbf{N}$ 。

因此， $[0, 1] \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} [0, n]$ 。

故 $\bigcap_{n=1}^{\infty} [0, n] = [0, 1]$ 。

更一般的情形，假設我們有一個集合 I ，而對每一個 $\alpha \in I$ ， A_α 為一為包含於宇集 U 之集合。我們稱 $\{A_\alpha : \alpha \in I\}$ 為一加標集合族 (indexed family of sets)， I 則稱為其指標集 (index set)。

定義 假設 I 為一非空集合， $\{A_\alpha : \alpha \in I\}$ 為一加標集合族，

$$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \{x \in U \mid \exists \alpha \in I \text{ 使得 } x \in A_\alpha\}$$

$$\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = \{x \in U \mid x \in A_\alpha, \forall \alpha \in I\}$$

註：1. 若 $I = \{1, 2\}$ ，則 $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = A_1 \cup A_2$ ， $\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = A_1 \cap A_2$ 。

$$2. \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n, \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n.$$

例：假設對每一個 $q \in \mathbb{Z}^+$ ， $A_q = \{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}\}$ ，則

$$\bigcup_{q \in \mathbb{Z}^+} A_q = \mathbb{Q}$$

$$\bigcap_{q \in \mathbb{Z}^+} A_q = \mathbb{Z}$$

解：若 $x \in \bigcup_{q \in \mathbb{Z}^+} A_q$ ，則 $\exists q \in \mathbb{Z}^+$ 使得 $x \in A_q$ 。因此， $\exists p \in \mathbb{Z}$ 使得 $x = \frac{p}{q}$ 。

我們得知 $x \in \mathbb{Q}$ 。所以 $\bigcup_{q \in \mathbb{Z}^+} A_q \subseteq \mathbb{Q}$ 。

反之，若 $x \in \mathbb{Q}$ ，則 $\exists p, q \in \mathbb{Z}$ ， $q \neq 0$ ，使得 $x = \frac{p}{q}$ ；其實我們可以取到 $q \in \mathbb{Z}^+$ 。

因此， $x \in A_q \subseteq \bigcup_{q \in \mathbb{Z}^+} A_q$ 。所以 $\mathbb{Q} \subseteq \bigcup_{q \in \mathbb{Z}^+} A_q$ 。

故 $\bigcup_{q \in \mathbb{Z}^+} A_q = \mathbb{Q}$ 。

若 $x \in \bigcap_{q \in \mathbb{Z}^+} A_q$ ，則 $x \in A_1$ 。因此， $\exists p \in \mathbb{Z}$ 使得 $x = \frac{p}{1} = p \in \mathbb{Z}$ 。

所以 $\bigcap_{q \in \mathbb{Z}^+} A_q \subseteq \mathbb{Z}$ 。

反之，若 $x \in \mathbf{Z}$ ，則 $xq \in \mathbf{Z}$ ， $\forall q \in \mathbf{Z}^+$ 。因此， $x = \frac{xq}{q} \in A_q$ ， $\forall q \in \mathbf{Z}^+$ 。

我們得知 $x \in \bigcap_{q \in \mathbf{Z}^+} A_q$ ，因此 $\mathbf{Z} \subseteq \bigcap_{q \in \mathbf{Z}^+} A_q$ 。

故 $\bigcap_{q \in \mathbf{Z}^+} A_q = \mathbf{Z}$ 。

定理 2 假設 I 為一非空集合， $\{A_\alpha : \alpha \in I\}$ 為一加標集合族，

(a) 若 A 為集合且 $A_\alpha \subseteq A$ ， $\forall \alpha \in I$ ，則 $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \subseteq A$ 。

(b) 若 B 為集合且 $B \subseteq A_\alpha$ ， $\forall \alpha \in I$ ，則 $B \subseteq \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$ 。

證明：略。

例： $\bigcup_{x \in \mathbf{R}^+} (0, x) = (0, \infty)$ ， $\bigcap_{x \in \mathbf{R}^+} (0, x) = \emptyset$ 。

解：因為 $(0, x) \subseteq (0, \infty)$ ， $\forall x \in \mathbf{R}^+$ ，由定理 2(a) 得知 $\bigcup_{x \in \mathbf{R}^+} (0, x) \subseteq (0, \infty)$ 。

若 $a \in (0, \infty)$ ，則 $a \in (0, a+1)$ 。因此， $a \in \bigcup_{x \in \mathbf{R}^+} (0, x)$ 。

所以， $(0, \infty) \subseteq \bigcup_{x \in \mathbf{R}^+} (0, x)$ 。

故 $\bigcup_{x \in \mathbf{R}^+} (0, x) = (0, \infty)$ 。

假設 $\bigcap_{x \in \mathbf{R}^+} (0, x) \neq \emptyset$ ，則 $\exists a \in \bigcap_{x \in \mathbf{R}^+} (0, x)$ 。因此， $a \in (0, 1)$ 。我們得知 $a > 0$ 。

然而 $a > \frac{a}{2}$ 且 $\frac{a}{2} \in \mathbf{R}^+$ ，所以 $a \notin (0, \frac{a}{2})$ 。

所以 $a \notin \bigcap_{x \in \mathbf{R}^+} (0, x)$ ，我們得到矛盾。

故 $\bigcap_{x \in \mathbf{R}^+} (0, x) = \emptyset$ 。

定理 3 假設 I 為一非空集合， $\{A_\alpha: \alpha \in I\}$ 為一加標集合族， U 為字集，

$$(a) \left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \right)^c = \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha^c.$$

$$(b) \left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \right)^c = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha^c.$$

證明：(a) 我們先注意到

$$x \notin \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \quad \text{若且唯若} \quad x \notin A_\alpha, \quad \forall \alpha \in I.$$

$$\text{若 } x \in \left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \right)^c, \text{ 則 } x \notin \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$$

$$\text{因此, } x \notin A_\alpha, \quad \forall \alpha \in I; \text{ 即 } x \in A_\alpha^c, \quad \forall \alpha \in I.$$

$$\text{所以, } \left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \right)^c \subseteq \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha^c.$$

$$\text{反之, 若 } x \in \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha^c, \text{ 則 } x \in A_\alpha^c, \quad \forall \alpha \in I.$$

$$\text{也就是 } x \notin A_\alpha, \quad \forall \alpha \in I.$$

$$\text{因此, } x \notin \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha; \text{ 即 } x \in \left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \right)^c.$$

$$\text{所以, } \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha^c \subseteq \left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \right)^c.$$

$$\text{故 } \left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \right)^c = \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha^c.$$

(b) 與 (a) 類似，略。