考试在线
www.kaoshi.tv

电子书

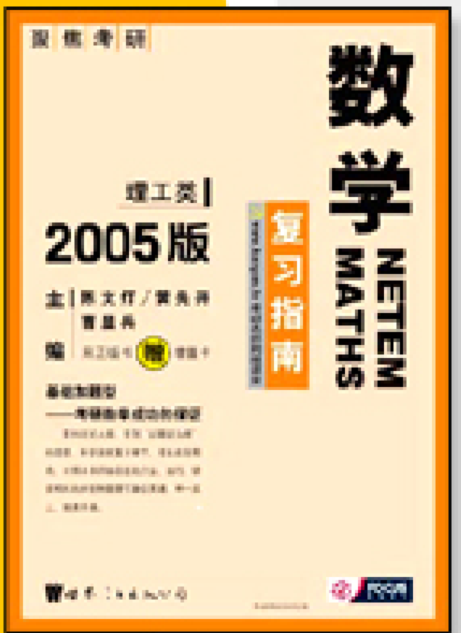
2005版
数学复习指南

原著：陈文灯／黄先开／曹显兵

（理工类）

习题详解

潘正义编写



潘正义教授

所授课程：考研数学（考试在线资深考研数学名师）
教育背景：天津农学院任数学教研室主任
名师简介：潘正义教授，1963年毕业于同济大学数学系，从事数学教学40余年，退休前是天津农学院数学教研室主任，长期在第一线从事数学教学工作，参编数年数学教材，并由科学出版社出版了译著“美国大学生数学竞赛例题精讲”一书（该书是普斯林格出版社数学丛书中关于解题方法的很有名的书籍），先后在各种数学刊物上发表了：“矩阵与指点问题的注记”等和数学解题方法 有关的文章20余篇。1999年起在天津大学培训部从事考研数学培训工作，主讲陈文灯先生的考研教材，并精讲了陈先生教材中的全部习题。

第三章　　向量

一. 填空题

1. 设 $\alpha_1=(2,-1,0,5),\ \alpha_2=(-4,-2,3,0),\ \alpha_3=(-1,0,1,k),\ \alpha_4=(-1,0,2,1)$，则 **k** = ______ 时, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关.

解. 考察行列式

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & k & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -8 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 5 & -10 & k & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -8 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ -10 & k & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -8-3k+20-10+16k+3 = 13k+5 = 0. \qquad k=-\frac{5}{13}$$

2. 设 $\alpha_1=(2,-1,3,0),\ \alpha_2=(1,2,0,-2),\ \alpha_3=(0,-5,3,4),\ \alpha_4=(-1,3,t,0)$，则 t = ______时, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关.

解. 考察行列式

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -5 & 3 \\ 3 & 0 & 3 & t \\ 0 & -2 & 4 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ -5 & 5 & -5 & 3 \\ 3 & t & 3 & t \\ 4 & -2 & 4 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & 5 & -5 \\ 3 & t & 3 \\ 4 & -2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= -20t+60+30+20t-30-60 = 0.$$

所以对任何 t, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关. 即不存在 t, 使$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关.

3. 已知 $\alpha=(3,5,7,9),\ \beta=(-1,5,2,0)$, x 满足 $2\alpha + 3x = \beta$, 则 x = ______.

解. $x = \frac{1}{3}(\beta-2\alpha) = \frac{1}{3}\left[\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ 14 \\ 18 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} -7/3 \\ -5/3 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix}$

4. 当 k = ______时, 向量$\beta = (1, k, 5)$能由向量 $\alpha_1=(2,-3,2),\ \alpha_2=(2,-1,1)$, 线性表示.

解. 考察行列式

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ k & -3 & -1 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$, 得 $k = -8$. 当 $k = -8$ 时, 三个向量的行列式为 0, 于是 $\beta, \alpha_1, \alpha_2$ 线性相关. 显然 α_1, α_2 线性无关, 所以 β 可用 α_1, α_2 线性表示.

5. 已知 $\alpha_1=(1,1,2,2,1),\ \alpha_2=(0,2,1,5,-10),\ \alpha_3=(2,0,3,-1,3),\ \alpha_4=(1,1,0,4,-1)$，则秩($\alpha_1$,

$\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) =$ ______.

解. 将$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$表示成矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 5 & -5 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2/5 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2/5 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$ 所以 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = 3$

6. 设 $A = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 1 & 7 \\ 4 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & -9 & 0 \\ -1 & 3 & -16 & -1 \\ 2 & -4 & 22 & 3 \end{bmatrix}$, 则秩(A) = ______.

解. $$A = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 1 & 7 \\ 4 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & -9 & 0 \\ -1 & 3 & -16 & -1 \\ 2 & -4 & 22 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -9 & 0 \\ 4 & 0 & 4 & 1 \\ 6 & 1 & 1 & 7 \\ -1 & 3 & -16 & -1 \\ 2 & -4 & 22 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -9 & 0 \\ 0 & -8 & 40 & 1 \\ 0 & -11 & 55 & 7 \\ 0 & 5 & -25 & -1 \\ 0 & -8 & 40 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -9 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -1/8 \\ 0 & 1 & -5 & -7/11 \\ 0 & 1 & -5 & -1/5 \\ 0 & 1 & -5 & -3/8 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -9 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -1/8 \\ 0 & 0 & 0 & -45/88 \\ 0 & 0 & 0 & -3/40 \\ 0 & 0 & 0 & -1/4 \end{bmatrix}$$

所以 $r(A) = 3$.

7. 已知 $\alpha = (1,0,-1,2)^T$, $\beta = (0,1,0,2)$, 矩阵 $A = \alpha \cdot \beta$, 则秩(A) = ______.

解. $$A = \alpha \cdot \beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

所以 $r(A) = 1$.

8. 已知向量 $\alpha_1 = (1,2,3,4)$, $\alpha_2 = (2,3,4,5)$, $\alpha_3 = (3,4,5,6)$, $\alpha_4 = (4,5,6,t)$, 且秩(α_1, α_2, α_3, α_4) = 2, 则 t = ______.

解. $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -4 & -6 \\ 0 & -3 & -6 & t-16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t-7 \end{bmatrix}$

所以当 $t = 7$ 时, $r(A) = 2$.

二. 选择题

1. 设向量组$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性无关，则下列向量组线性相关的是

(A) $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$　　(B) $\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$

(C) $\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_1$　　(D) $\alpha_1 + \alpha_2, 2\alpha_2 + \alpha_3, 3\alpha_3 + \alpha_1$

解. 由　$k_1(\alpha_1 - \alpha_2) + k_2(\alpha_2 - \alpha_3) + k_3(\alpha_3 - \alpha_1) = 0$

得　$(k_1 - k_3)\alpha_1 + (k_2 - k_1)\alpha_2 + (k_3 - k_2)\alpha_3 = 0$

因为向量组$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性无关，所以得关于$k_1, k_2, k_3$的方程组

$$\begin{cases} k_1 - k_3 = 0 \\ -k_1 + k_2 = 0 \\ -k_2 + k_3 = 0 \end{cases}$$

k_1, k_2, k_3的系数行列式为 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 1 = 0$. 所以$k_1, k_2, k_3$有非零解，所以

$\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_1$线性相关. (C)是答案.

2. 设矩阵$A_{m\times n}$的秩为$R(A) = m < n$, E_m为m阶单位矩阵，下列结论正确的是

(A) A的任意m个列向量必线性无关　　(B) A的任意一个m阶子式不等于零

(C) 若矩阵B满足$BA = 0$，则$B = 0$　　(D) A通过行初等变换，必可以化为$(E_m, 0)$的形式

解. (A), (B)都错在“任意”; (D)不正确是因为只通过行初等变换不一定能将A变成$(E_m, 0)$的形式; (C)是正确答案. 理由如下:

因为 $BA = 0$，所以 $0 = r(BA) \ge r(B) + r(A) - m = r(B) + m - m = r(B)$. 所以$r(B) = 0$.

于是$B = 0$.

3. 设向量组 (I): $\alpha_1 = (a_{11}, a_{21}, a_{31})^T, \alpha_2 = (a_{12}, a_{22}, a_{32})^T, \alpha_3 = (a_{13}, a_{23}, a_{33})^T$;设向量组

(II): $\beta_1 = (a_{11}, a_{21}, a_{31}, a_{41})^T, \beta_2 = (a_{12}, a_{22}, a_{32}, a_{42})^T, \beta_3 = (a_{13}, a_{23}, a_{33}, a_{43})^T$，则

(A) (I)相关$\Rightarrow$(II)相关　　(B) (I)无关$\Rightarrow$(II)无关

(C) (II)无关$\Rightarrow$(I)无关　　(B) (I)无关$\Leftrightarrow$(II)无关

解. 由定理: 若原向量组线性无关，则由原向量组加长后的向量组也线性无关. 所以(B)是答案.

4. 设$\beta, \alpha_1, \alpha_2$线性相关, $\beta, \alpha_2, \alpha_3$线性无关，则

(A) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性相关　　(B) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性无关

(C) α_1 可用β, α_2, α_3 线性表示　　　　　(D) β可用α_1, α_2 线性表示

解. 因为β, α_1, α_2 线性相关，所以β, α_1, α_2, α_3 线性相关. 又因为β, α_2, α_3 线性无关，所以α_1 可用β, α_2, α_3 线性表示. (C)是答案.

5. 设 A, B 是 n 阶方阵，且秩(A) = 秩(B)，则

(A) 秩$(A-B) = 0$　　　　　(B) 秩$(A+B) = 2$ 秩(A)

(C) 秩$(A-B) = 2$ 秩(A)　　　　　(D) 秩$(A+B) \le$秩(A) + 秩(B)

解. (A) 取 $A \ne B$ 且$|A| \ne 0$, $|B| \ne 0$ 则 $A-B \ne 0$，则 $r(A-B) \ne 0$. 排除(A);
(B) 取 $A = -B \ne 0$，则秩$(A+B) \ne 2$ 秩(A); (C) 取 $A = B \ne 0$，则秩$(A-B) \ne 2$ 秩(A). 有如下定理：秩$(A+B) \le$秩(A) + 秩(B). 所以(D)是答案.

三. 计算证明题

1. 已知向量组 $\alpha_1 = (t,2,1)$, $\alpha_2 = (2,t,0)$, $\alpha_3 = (1,-1,1)$，试求出 t 为何值时，向量组α_1, α_2, α_3 线性相关或线性无关.

解. $\begin{vmatrix} t & 2 & 1 \\ 2 & t & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = t^2 - 2 - t - 4 = t^2 - t - 6 = 0$，　$t_1 = 3$，　$t_1 = -2$

所以　$t \ne -2$且$t \ne 3$时, α_1, α_2, α_3 线性无关；$t = -2$且$t = 3$时, α_1, α_2, α_3 线性相关.

2. 设有三维向量 $\alpha_1 = \begin{bmatrix} k \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$，$\alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ k \\ 1 \end{bmatrix}$，$\alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$，$\beta = \begin{bmatrix} 1 \\ k \\ k^2 \end{bmatrix}$ 问 k 取何值时

i. β可由α_1, α_2, α_3 线性表示，且表达式唯一;

ii. β可由α_1, α_2, α_3 线性表示，但表达式不唯一;

iii. β不能由α_1, α_2, α_3 线性表示.

解. $\begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2k^2 - 2k = 2k(k-1)$

i. $k \ne 0$且$k \ne 1$时, α_1, α_2, α_3 线性无关，四个三维向量一定线性相关，所以β可由α_1, α_2, α_3 线性表示，由克莱姆法则知表达式唯一;

ii. 当 $k = 1$ 时

$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \vdots & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$. 系数矩阵的秩等于增广矩阵的秩为 2. 所以所以β可由α_1, α_2, α_3 线性表示，但表示不惟一;

iii. 当 $k = 0$ 时

$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \vdots & 0 \\ 1 & 1 & 2 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & -1 \end{bmatrix}$.系数矩阵的秩等于 2，增广矩阵的秩为 3，所以所以β不能由α_1, α_2, α_3 线性表示.

3. 设向量组$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性相关，向量组$\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$线性无关，问

i. α_1能否由α_2, α_3线性表出？证明你的结论；

ii. α_4能否由$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性表出？证明你的结论

解. i. α_1不一定能由α_2, α_3线性表出. 反例：$\alpha_1=(1,1)^T$，$\alpha_2=(1,0)^T$，$\alpha_3=(2,0)^T$. 向量组$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性相关，但$\alpha_1$不能由$\alpha_2, \alpha_3$线性表出；

ii. α_4不一定能由$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性表出. 反例：$\alpha_1=(2,0,0)^T$，$\alpha_2=(1,0,0)^T$，$\alpha_3=(0,1,0)^T$，

$\alpha_4=(0,0,1)^T$. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性相关，$\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$线性无关，$\alpha_4$不能由$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性表出.

4. 已知 m 个向量$\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_m$线性相关，但其中任意 $m-1$ 个都线性无关，证明：

i. 如果存在等式

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$$

则这些系数 $k_1, k_2, \cdots k_m$ 或者全为零，或者全不为零；

ii. 如果存在两个等式

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$$
$$l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+\cdots+l_m\alpha_m=0$$

其中 $l_1\neq 0$，则 $\dfrac{k_1}{l_1}=\dfrac{k_2}{l_2}=\cdots=\dfrac{k_m}{l_m}$.

解. i. 假设 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$，如果某个 $k_i=0$. 则

$$k_1\alpha_1+\cdots+k_{i-1}\alpha_{i-1}+k_{i+1}\alpha_{i+1}\cdots+k_m\alpha_m=0$$

因为任意 $m-1$ 个都线性无关，所以 $k_1, k_2, \cdots k_{i-1}, k_{i+1}, \cdots, k_m$ 都等于 0，即这些系数 $k_1, k_2, \cdots k_m$ 或者全为零，或者全不为零；

ii. 因为 $l_1\neq 0$，所以 $l_1, l_2, \cdots l_m$ 全不为零. 所以 $\alpha_1=-\dfrac{l_2}{l_1}\alpha_2-\cdots-\dfrac{l_m}{l_1}\alpha_m$.

代入第一式得：$k_1(-\dfrac{l_2}{l_1}\alpha_2-\cdots-\dfrac{l_m}{l_1}\alpha_m)+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$

即 $(-\dfrac{l_2}{l_1}k_1+k_2)\alpha_2+\cdots+(-\dfrac{l_m}{l_1}k_1+k_m)\alpha_m=0$

所以 $-\dfrac{l_2}{l_1}k_1+k_2=0$，…，$-\dfrac{l_m}{l_1}k_1+k_m=0$

即 $\dfrac{k_1}{l_1}=\dfrac{k_2}{l_2}=\cdots=\dfrac{k_m}{l_m}$

5. 设向量组$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性无关，问常数 a, b, c 满足什么条件 $a\alpha_1-\alpha_2, b\alpha_2-\alpha_3, c\alpha_3-\alpha_1$ 线性相关.

解. 假设 $k_1(a\alpha_1-\alpha_2)+k_2(b\alpha_2-\alpha_3)+k_3(c\alpha_3-\alpha_1)=0$

得 $(k_1a-k_3)\alpha_1+(k_2b-k_1)\alpha_2+(k_3c-k_2)\alpha_3=0$

因为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关，得方程组 $\begin{cases} ak_1-k_3=0 \\ -k_1+bk_2=0 \\ -k_2+ck_3=0 \end{cases}$

当行列式 $\begin{vmatrix} a & 0 & -1 \\ -1 & b & 0 \\ 0 & -1 & c \end{vmatrix}=0$ 时，k_1,k_2k_3 有非零解. 所以 $abc=1$ 时，$a\alpha_1-\alpha_2$, $b\alpha_2-\alpha_3$, $c\alpha_3-\alpha_1$ 线性相关.

6. 设 A 是 n 阶矩阵，若存在正整数 k，使线性方程组 $A^kx=0$ 有解向量 α，且 $A^{k-1}\alpha\neq 0$，证明：向量组 $\alpha, A\alpha, A^{k-1}\alpha$ 是线性无关的.

解. 假设 $a_0\alpha+a_1A\alpha+\cdots+a_{k-1}A^{k-1}\alpha=0$. 二边乘以 A^{k-1} 得

$$a_0A^{k-1}\alpha=0, \qquad a_0=0$$

由 $a_1A\alpha+\cdots+a_{k-1}A^{k-1}\alpha=0$. 二边乘以 A^{k-1} 得

$$a_1A^{k-1}\alpha=0, \qquad a_1=0$$

………………………………

最后可得 $a_{k-1}A^{k-1}\alpha=0$, $a_{k-1}=0$

所以向量组 $\alpha, A\alpha, A^{k-1}\alpha$ 是线性无关.

7. 求下列向量组的一个极大线性无关组，并把其余向量用极大线性无关组线性表示.

i. $\alpha_1=(1,2,1,3)$, $\alpha_2=(4,-1,-5,-6)$, $\alpha_3=(-1,-3,-4,-7)$, $\alpha_4=(2,1,2,3)$.

ii. $\alpha_1=(1,-1,2,4)$, $\alpha_2=(0,3,1,2)$, $\alpha_3=(3,0,7,14)$, $\alpha_4=(1,-2,2,0)$, $\alpha_5=(2,1,5,10)$.

解. 解. i. $\begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -3 & 1 \\ 1 & -5 & -4 & 2 \\ 3 & -6 & -7 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & -9 & -1 & -3 \\ 0 & -9 & -3 & 0 \\ 0 & -18 & -4 & -3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 9 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 9 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

所以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是极大线性无关组. 由 $\alpha_4=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3$ 得方程组

$$\begin{cases} k_1 + 4k_2 - k_3 = 2 \\ 9k_2 + k_3 = 3 \\ 2k_3 = -3 \end{cases} \quad \text{解得} \quad k_1 = k_3 = -\frac{3}{2}, \quad k_2 = \frac{1}{2}$$

所以 $\alpha_4 = -\frac{3}{2}\alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_2 - \frac{3}{2}\alpha_3$

ii. $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 7 & 2 & 5 \\ 4 & 2 & 14 & 0 & 10 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -4 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

所以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 是极大线性无关组. 由 $\alpha_5 = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_4$ 得方程组

$$\begin{cases} k_1 + k_3 = 2 \\ k_2 = 1 \\ -k_3 = 0 \\ -4k_3 = 0 \end{cases} \quad \text{解得} \quad k_1 = 2, \quad k_2 = 1, \quad k_3 = 0$$

所以 $\alpha_5 = 2\alpha_1 + \alpha_2 + 0\alpha_4$

由 $\alpha_3 = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_4$ 得方程组

$$\begin{cases} k_1 + k_3 = 3 \\ k_2 = 1 \\ -k_3 = 0 \\ -4k_3 = 0 \end{cases} \quad \text{解得} \quad k_1 = 3, \quad k_2 = 1, \quad k_3 = 0$$

所以 $\alpha_3 = 3\alpha_1 + \alpha_2 + 0\alpha_4$

8. 已知三阶矩阵 $A = \begin{bmatrix} x & y & y \\ y & x & y \\ y & y & x \end{bmatrix}$, 讨论秩(A)的情形.

解. **i.** $x = y = 0$, $r(A) = 0$

ii. $x = 0, y \neq 0$ 或 $x \neq 0, y = 0$, $r(A) = 3$

iii. $x = y \neq 0$, $r(A) = 1$

iv. $x=-y\neq 0$， $r(A)=3$

iv. $x\neq 0, y\neq 0, x\neq \pm y$

$$A=\begin{bmatrix} x & y & y \\ y & x & y \\ y & y & x \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} xy & y^2 & y^2 \\ xy & x^2 & xy \\ xy & xy & x^2 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} xy & y^2 & y^2 \\ 0 & x^2-y^2 & xy-y^2 \\ 0 & xy-y^2 & x^2-y^2 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} x & y & y \\ 0 & x+y & y \\ 0 & y & x+y \end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix} x & y & y \\ 0 & x+y & y \\ 0 & 0 & x(x+2y) \end{bmatrix}$$

所以，当 $x=-2y$ 时，$r(A)=2$；当 $x\neq -2y$ 时，$r(A)=3$

9. 设三阶矩阵 A 满足 $A^2=E$(E 为单位矩阵)，但 $A\neq\pm E$，试证明:

(秩($A-E$)－1)(秩($A+E$)－1) = 0

解. 由第十一题知

$$r(A+E)+r(A-E)=3$$

又因为 $A\neq\pm E$，所以 $r(A+E)\neq 0$， $r(A-E)\neq 0$

所以 $r(A+E)$， $r(A-E)$ 中有一个为 1

所以 **(秩($A-E$)－1)(秩($A+E$)－1) = 0**

10. 设 A 为 n 阶方阵，且 $A^2=A$，证明：若 A 的秩为 r，则 $A-E$ 的秩为 $n-r$，其中 E 是 n 阶单位矩阵.

解. 因为 $A^2=A$， 所以 $A(A-E)=0$

所以 $0=r(A(A-E))\geq r(A)+r(A-E)-n$

所以 $r(A)+r(A-E)\leq n$

又因为 $r(A)+r(A-E)=r(A)+r(E-A)\geq r(A+E-A)=r(E)=n$

所以 $r(A)+r(A-E)=n$. 所以 $r(A-E)=n-r$

11. 设 A 为 n 阶方阵，证明：如果 $A^2=E$，则秩($A+E$) + 秩($A-E$) = n.

解. 因为 $A^2=E$， 所以 $0=(A-E)(A+E)$

所以 $0=r((A+E)(A-E))\geq r(A+E)+r(A-E)-n$

所以 $r(A+E)+r(A-E)\leq n$

又因为 $r(A+E)+r(A-E)=r(A+E)+r(E-A)\geq r(A+E+E-A)=r(2E)=n$

所以 $r(A+E)+r(A-E)=n$.

12. 设 $A=\begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{bmatrix}$，**试证存在数λ，使得 $A^k=\lambda^{k-1}A$.**

解. $A=\begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{bmatrix}=\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 & \cdots & b_n \end{pmatrix}$

令 $\lambda=\begin{pmatrix} b_1 & \cdots & b_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$

则 $A^k=\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 & \cdots & b_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 & \cdots & b_n \end{pmatrix}\cdots\cdots\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 & \cdots & b_n \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}\lambda^{k-1}\begin{pmatrix} b_1 & \cdots & b_n \end{pmatrix}=\lambda^{k-1}A$

13. 设 $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & c \\ b & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$，**i. *a, b, c* 满足什么条件时，矩阵 A 的秩为 3； ii. *a, b, c* 取何值时，A 是对称矩阵；iii. 取一组 *a, b, c* 使得 A 为正交矩阵.**

解. i. $|A|=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & c \\ b & 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix}=bc-\frac{1}{2}a\neq 0$．即 $a\neq 2bc$ 时，$r(A)=3$；

ii. $a=1, b=0, c=0$ **时，*A* 为对称矩阵；**

iii. A 为正交矩阵，则 $\begin{cases} a^2+b^2=1 \\ c^2+\dfrac{1}{4}=1 \\ ac+\dfrac{1}{2}b=0 \end{cases}$. $c=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

当 $c=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 时， 解得 $a=\pm\dfrac{1}{2}$， $b=\mp\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

当 $c=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 时， 解得 $a=\pm\dfrac{1}{2}$， $b=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(a,b,c) 有四组解 $(\dfrac{1}{2},-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2})$，$(-\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}),(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2},-\dfrac{\sqrt{3}}{2}),(-\dfrac{1}{2},-\dfrac{\sqrt{3}}{2},-\dfrac{\sqrt{3}}{2})$.

14. 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，秩$(A)=n-1$，证明：存在常数 k，使得$(A^*)^2=kA^*$.

解. 先证明： $r(A)=1 \Leftrightarrow A=\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}(b_1 \quad \cdots \quad b_n)$

“ $\Rightarrow$ ” 因为 $r(A)=1$，所以 A 的行向量的极大线性无关组只含一个向量

$$\alpha_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})$$

所以 $$A=\begin{pmatrix} k_1\alpha_i \\ \vdots \\ k_{i-1}\alpha_i \\ \alpha_i \\ k_{i+1}\alpha_i \\ \vdots \\ k_n\alpha_i \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_{i-1} \\ 1 \\ k_{i+1} \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}\alpha_i=\begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_{i-1} \\ 1 \\ k_{i+1} \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})$$

“ $\Leftarrow$ ” 令 $\alpha=\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$， 则 $A=\alpha(b_1 \quad \cdots \quad b_n)=(b_1\alpha \quad \cdots \quad b_n\alpha)$

所以 $r(A)=1$.

证明本题:

因为 $r(A)=n-1$， 所以 $r(A^*)=1$

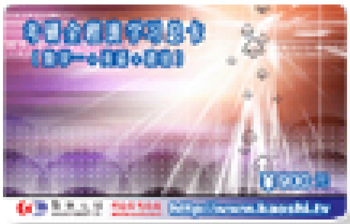
所以 A^* 可分解成 $A^* = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & \cdots & b_n \end{pmatrix}$

由第 12 题知，存在常数 k，满足 $(A^*)^2 = kA^*$.

各类考研学习卡及充值卡

考试在线
www.kaoshi.tv

考研学习全程班套餐卡



考研全程班学习数学一套餐卡

考研全程班学习数学一套餐卡

考研全程班学习数学一套餐卡

考研全程班学习数学一套餐卡

对应课程：考研数学全程班（数学一）（数学二）（数学三）（数学四）、考研英语全程班、考研政治全程班

主讲教师：潘正义、张建国、夏德荣、任丽卿、宫东风、包仁、徐之明、李海洋、汪云生

考研学习全程班单科卡

考研数学全程班数学一学习卡

考研数学全程班数学一学习卡

考研数学全程班数学一学习卡

考研数学全程班数学一学习卡

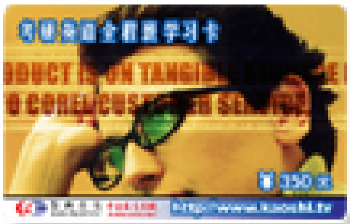
对应课程：考研数学全程班（数学一）（数学二）（数学三）（数学四）

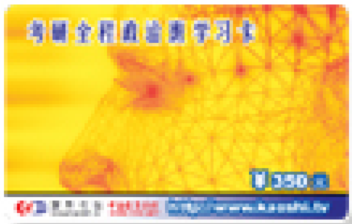
主讲教师：潘正义、张建国

各类考研学习卡及充值卡

考试在线 www.kaoshi.tv

考研学习全程班单科卡





名称：考研英语全程班学习卡
对应课程：考研英语
主讲教师：夏徛荣、任丽卿、宫东风

名称：考研政治全程班学习卡
对应课程：考研政治
主讲教师：包仁、徐之明、李海洋、汪云生

聚焦名师课堂学习充值卡(适用于所有课程)

聚焦名师课堂学习50元充值卡

聚焦名师课堂学习100元充值卡

聚焦名师课堂学习150元充值卡

聚焦名师课堂学习200元充值卡

进入名师课堂 考研路上也从容

考试在线名师课堂五大优势

1. 省心——听课时间可自由选择，再也不会错过好课。
2. 省力——足不出户即可听课，免去奔波之苦。
3. 省时——卡一到手，即可听课，助你考研成功。
4. 省烦恼——板书看不清、老师有口音、讲课速度快这些烦恼，全部省掉。
5. 省银子——费用比面授培训低至少1/3。

考试在线学习卡独具八大魅力

1. 网罗当今顶尖级考研名师，全国绝无仅有的豪华阵容。
2. 先下载，后认证,离线听课，比同类课件省99%上网费。
3. 视频不受网络带宽的影响，可以不让名师变结巴。
4. 界面集声音、图像、笔记于一体，名师与你零距离。
5. 记次不记时，可以反复跳跃听N遍。
6. 年限不定死，开卡后有效期持续一年，在任何时候都可以买到保值的学习卡。
7. 考试在线网站全方位服务支持，更可通过"考试通"与名师在线聊天，随时沟通无极限。
8. 更有超级DIY的充值卡,可以灵活自由选择课件，想听多少充多少。